14. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2020/2021. ГОДИНЕ.
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

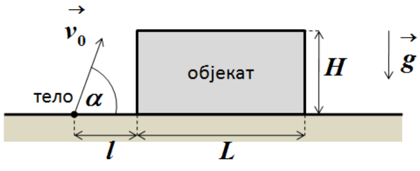
Крагујевац
27-28. мај 2021.

ЗАДАЦИ

Задатак 1 - Четири независна проблема (12 поена)

1.а Прелет тела преко објекта (3 поена)

На хоризонталној подлози налази се објекат облика квадра ширине $L = 5\,\mathrm{m}$ и висине $H = L/2$. Израчунати минималну вредност почетне брзине $\vec{v}_0$ тела, угао α под којим је потребно избацити тело са хоризонталне подлоге, и растојање l од места са ког се избацује тело до доње ивице објекта тако да тело може да прелети објекат а да га не додирне (слика 1). За убрзање силе Земљине теже узети $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Отпор ваздуха и димензије тела занемарити.



слика 1

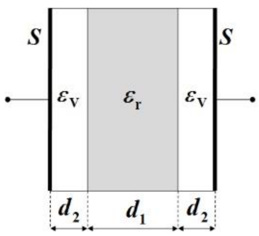
1.б Капацитет и пробој кондензатора (3 поена)

На слици 2 је приказан плочасти кондензатор са чврстим, линеарним, хомогеним и изотропним диелектриком релативне диелектричне пропустљивости $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$ и дебљине $d_1 = 5\,\mathrm{mm}$. Површина плоче кондензатора је $S = 0{,}5\,\mathrm{dm}^2$. Између сваке од плоча и диелектрика налази се слој ваздуха дебљине $d_2 = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ (слика 2).

1.б.1. Одредити вредности јачина електричног поља у диелектрику и у ваздушним слојевима, затим на основу дефиниције за капацитет кондензатора $C = q/U$ одредити израз за капацитет датог кондензатора и одредити његову вредност.

1.б.2. Одредити вредност напона U_p на који можемо прикључити ненаелектрисан кондензатор, а да не дође до пробоја ни у једном његовом делу.

1.б.3. У случају да диелектрик у потпуности испуњава простор између плоча кондензатора (нема ваздушних слојева), одредити максималну вредност напона U_p1 на који можемо прикључити ненаелектрисани кондензатор а да не дође до његовог пробоја.



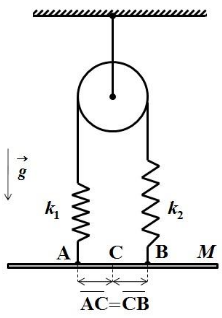
слика 2

Вредност електричног поља у диелектрику при којем долази до његовог пробоја је $E_\mathrm{kr1} = 300\,\mathrm{kV/cm}$. Вредност електричног поља у ваздуху при којем долази до његовог пробоја је $E_\mathrm{kr2} = 30\,\mathrm{kV/cm}$. Узети да је диелектрична пропустљивост ваздуха ε_V једнака диелектричној пропустљивости вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$. Сматрати да је ваздушни слој хомоген и изотропан. Ефекте крајева занемарити. Електрична индукција $\vec{D}$ је непрекидна на граници ваздушног слоја и диелектрика, као и на граници диелектрика и ваздушног слоја.

Уопштена Гаусова теорема у математичком облику је приказана једначином $\int\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$, где интеграл са леве стране једнакости представља укупни флукс електричног поља кроз произвољну површину S, а q укупно наелектрисање у запремини V ограниченој површином S.

1.в Осциловање греде (3 поена)

За хомогену, танку и круту греду масе M везане (тачке A и B) су две безмасене, идеално еластичне опруге чије су крутости редом k_1 и k_2, при чему је $k_1 > k_2$. Опруге су симетрично везане за греду на једнаком растојању од центра масе греде ($\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{CB}}$). Супротни крајеви опруга су повезане преко безмасене и неистегљиве нити која је пребачена преко непокретног котура. Систем се налази у равнотежи, у вертикалној равни, у положају приказаном на слици 3. Ако греду изведемо из равнотежног положаја тако што је повучемо вертикално наниже, одредите период осциловања греде, ако је она током осциловања увек у хоризонталном положају. Величине M, k_1 и k_2 сматрати познатим.



слика 3

1.г Квантни линеарни хармонијски осцилатор и топлотни резервоар (3 поена)

Посматрамо једнодимензионални квантни линеарни хармонијски осцилатор (масе m) и кружне фреквенције ω који је у равнотежи са топлотним резервоаром температуре T.

1.г.1 Одредити средњу вредност енергије осцилатора преко величина $\hbar, \omega, k_\mathrm{B}$ и T сматрајући да је вероватноћа налажења честице у одређеном стању са енергијом E_n дата функцијом $f(E_n) = Ce^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B}T}}$, где је C константа која се одређује из услова нормирања функције, k_B - Болцманова константа, T - апсолутна температура.

1.г.2 Одредити температуру на којој је вероватноћа да је осцилатор у основном стању једнака 1/2. Резултат изразити преко величина $\hbar, \omega, k_\mathrm{B}$.

Користити следеће формуле : $\sum_{j=0}^{+\infty} a^j = \frac{1}{1-a}$ и $\sum_{j=0}^{+\infty} j \cdot a^j = a \cdot \frac{d}{da} \sum_{j=0}^{+\infty} a^j$.

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене

Задатак припремили: Владимир Чубровић и доц. др Владимир Марковић, ПМФ, Крагујевац

Рецензенти: др Иван Живић, ред проф, др Ненад Стевановић, ван. проф., доц. др Момир Арсенијевић, Љубица Кузмановић, Милош Адамовић, Христина Делибашић и Милена Живковић, ПМФ Крагујевац

Председник Комисије за такмичење ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад и пуно успеха!!!

14. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2020/2021. ГОДИНЕ.
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

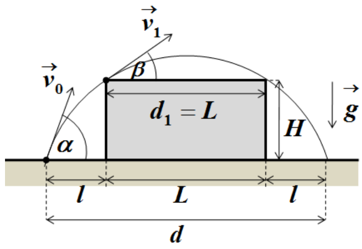
Крагујевац
27-28. мај 2021.

РЕШЕЊА

Задатак 1. Четири независна проблема (12 поена)

1.а Прелет тела преко објекта (3 поена)

1.а Да би тело прелетело објекат а да га не додирне потребно је да оствари максимални домет $d_1 = L$ (слика1), а да би га остварио у том случају мора да важи $\beta = 45^\circ$ **[0,25п]**. Како је $L = d_1 = \dfrac{2v_1^2 \sin\beta\cos\beta}{g} = \dfrac{v_1^2}{g}$ **[0,5п]**, тада је $v_1 = \sqrt{Lg}$ и $v_{1x} = v_{1y} = \sqrt{\dfrac{Lg}{2}}$ **[0,25п]**. Даље је $v_{1x} = v_{0x} = v_0\cos\alpha$ **[0,25п]** и $v_{1y} = \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gH}$ **[0,25п]** тако да је $v_0 = \sqrt{2Lg} \approx 9{,}9\,\mathrm{m/s}$ **[0,25+0,25п]** и $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+\dfrac{4H}{L}}\right) = 60^\circ$ **[0,25+0,25п].** Тражено растојање је $l = \dfrac{d-L}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} - L\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_0^2\sqrt{3}}{2g} - L\right) \approx 1{,}83\,\mathrm{m}$ **[0,25+0,25п].**



слика 1

1.б Капацитет и пробој кондензатора (3 поена)

1.б.1 Претпоставимо да су наелектрисања леве и десне електроде кондензатора редом q и $-q$. Из уопштеног Гаусовог закона следи $D \cdot S = q$ **[0,25п]**, где је S површина плоче кондензатора, а q укупно наелектрисање на њој, тако да је $D = \dfrac{q}{S}$. Како је величина $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ непрекидна и притом је $D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$, следи да је јачина електричног поља у диелектрику $E_1 = \dfrac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$ **[0,25п],** а јачина електричног поља у сваком од ваздушних слојева $E_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$ **[0,25п]**.

Напон између леве и десне електроде кондензатора је $U = E_2 d_2 + E_1 d_1 + E_2 d_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} d_1 + 2\dfrac{q}{\varepsilon_0 S} d_2$ **[0,25п]** (1).

Капацитет кондензатора је $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d_1 + 2\varepsilon_r d_2} \approx 19{,}7\,\mathrm{pF}$ **[0,25п+0,25п]**.

1.б.2. До траженог пробоја кондензатора долази ако је у било којој тачки диелектрика или ваздушног слоја јачина поља већа од одговарајуће критичне јачине. До пробоја долази у ваздушном слоју што се може показати на више начина један од њих је следећи.

Веза између јачина електричних поља у диелектрику и ваздушном слоју се добија из услова да је величина $\vec{D}$ непрекидна $\varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r E_1$ тако да је $E_1 = \dfrac{E_2}{\varepsilon_\mathrm{r}}$.

Ако се претпостави да до пробоја долази у ваздушном слоју тј. да је јачина електричног поља у ваздушном слоју достигла вредност $E_{\mathrm{kr2}} = 30\,\mathrm{kV/cm}$ тада је јачина електричног поља у диелектрику $E_1 = \dfrac{E_{\mathrm{kr}2}}{\varepsilon_\mathrm{r}} = 7{,}5\,\mathrm{kV/cm}$, и пошто је $E_1 < E_{\mathrm{kr1}}$ ($7{,}5\,\mathrm{kV/cm} < 300\,\mathrm{kV/cm}$) следи да није дошло до пробоја у диелектрику **[0,25п]**.

Слично, ако је дошло до пробоја у диелектрику тј. ако је јачина електричног поља у диелектрику слоју достигла вредност $E_{\mathrm{kr1}} = 300\,\mathrm{kV/cm}$, тада је јачина електричног поља у ваздушном слоју $E_2 = \varepsilon_\mathrm{r} E_{\mathrm{kr1}} = 1200\,\mathrm{kV/cm}$, и како је $E_2 > E_{\mathrm{kr2}}$ ($1200\,\mathrm{kV/cm} > 30\,\mathrm{kV/cm}$) дакле до пробоја је већ морало доћи у ваздушном слоју **[0,25п]**.

На основу претходне анализе вредност максималног напона при ком долази до пробоја износи $U_\mathrm{p} = 2E_{\mathrm{kr}2} d_2 + E_1 d_1 = 2E_{\mathrm{kr}2} d_2 + \dfrac{E_{\mathrm{kr}2}}{\varepsilon_\mathrm{r}} d_1 = 6{,}75\,\mathrm{kV}$ **[0,25п+0,25п]**.

1.б.3. У овом случају тражена вредност напона је $U_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{kr1}}(d_1 + 2d_2) = 180\,\mathrm{kV}$ **[0,25п +0,25п].**

1.в Осциловање греде (3 поена)

У равнотежном стању важе једначине $k_1(y_1 - l_0)\cdot\overline{\mathrm{AC}} = k_2(y_2 - l_0)\cdot\overline{\mathrm{CB}}$ тј. $k_1(y_1 - l_0) = k_2(y_2 - l_0)$ **[0,25п]** (1) (услов да је греда у хоризонталном положају) и $Mg = k_1(y_1 - l_0) + k_2(y_2 - l_0)$ **[0,25п]** (2) (услов да се греда не креће у вертикалном правцу) .

Ако се греда спусти вертикално наниже за растојање Y, свака од опруга ће се издужити за Y. Међутим да би опруга осциловала а притом опет била у хоризонталном положају смерови сила еластичности не смеју да се промене. Како је $k_1 > k_2$ и нит неистегљива да би то било испуњено опруга крутости k_2 ће се додатно издужити за y, док ће опруга крутости k_1 и даље бити издужена али ће се издужење смањити за дужину y. У том случају да би опруга била у хоризонталном положају мора да важи $k_1(y_1 + Y - y - l_0)\cdot\overline{\mathrm{AC}} = k_2(y_2 + Y + y - l_0)\cdot\overline{\mathrm{CB}}$ тј. $k_1(y_1 + Y - y - l_0) = k_2(y_2 + Y + y - l_0)$ **[0,5п]** (3).

Једначина кретања греде је $Ma = Mg - k_1(y_1 + Y - y - l_0) - k_2(y_2 + Y + y - l_0)$ **[0,5п]** (4).

Ако искористимо једначину (1) у једначини (3) добијамо $k_1(Y - y) = k_2(Y + y)$ (5) **[0,25п]**. Ако искористимо једначину (2) у једначини (4) добијамо $Ma = -k_1(Y - y) - k_2(Y + y)$ **[0,25п]** (6). Из једначине (5) следи $y = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}Y$ **[0,25п]** (7) и када последњу једнакост убацимо у једначину (6) и након сређивања добијамо $a + \dfrac{4k_1k_2}{M(k_1 + k_2)}Y = 0$ **[0,5п],** тако да је период осциловања греде $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M(k_1 + k_2)}{4k_1k_2}}$ **[0,25п].**

1.г Квантни линеарни хармонијски осцилатор и топлотни резервоар (3 поена)

1.г.1 Функција расподеле је $f(E_n) = Ce^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B}T}}$. Енергија једнодимензионалног квантног линеарног хармонијског осцилатора је $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Функцију расподеле треба нормирати $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} Ce^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B}T}} = 1$ **[0,25п]** тј. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} Ce^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}} = 1$ **[0,25п]**, односно $Ce^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}} = 1$ **[0,25п]**,па ако искористимо да је $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a^j = \dfrac{1}{1-a}$ добијамо $C = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}})e^{\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}$ **[0,25п],** тако да је функција расподеле $f(E_n) = f(n,\omega,T) = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}})e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}$ **[0,25п].**

Средња вредност енергије је $\langle E\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(E_n)E_n$ **[0,25п]**, $\langle E\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}})e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ **[0,25п],** односно $\langle E\rangle = \dfrac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}})\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-\frac{n\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}$ **[0,25п]**. Ако искористимо да је $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} j\cdot a^j = a\cdot\dfrac{d}{da}\left(\dfrac{1}{1-a}\right) = \dfrac{a}{(1-a)^2}$

добијамо $\langle E\rangle = \dfrac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\dfrac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}} = \dfrac{\hbar\omega}{2} + \dfrac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}} - 1}$ **[0,5п].**

1.г.2 Ако је вероватноћа $f(n = 0,\omega,T_0) = \dfrac{1}{2}$ тада је $e^{\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T_0}} = 2$ **[0,25п]** па је температура једнака $T_0 = \dfrac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}\ln 2}$ **[0,25п].**